MATHÉMATIQUES I
Algèbre et analyse

OPTION GÉNÉRALE PRIME

DURÉE : 4 heures

Avec ce sujet seront distribuées deux feuilles de papier millimétré.

Attention. — Il ne sera pas fourni de feuille supplémentaire.

L'utilisation de papiers différents apportés par le candidat serait assimilée à une tentative de fraude.

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'épreuve est constituée d'un exercice noté sur 7 points et d'un problème noté sur 13 points.

EXERCICE (*sur 7 points*)

$\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$. Soient g, id, et f_m les éléments de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ de matrices respectives A, I et $M_m = m\,A + J$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ avec :

$$m \in \mathbf{R}\ ;\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ;\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ;\ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ avec $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, -2)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.

I. 1° *a*) Montrer que B est une base de $\mathbf{R}^3$.

b) Déterminer par la méthode du pivot le rang de la matrice M_m suivant les valeurs de m.

c) Donner au moyen des vecteurs de B une base de l'image et du noyau des endomorphismes f_0 et f_{-3}.

2° *a*) Calculer A^2.

Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\quad A^n J = J$
$\forall n \in \mathbf{N}^*,\quad J^n = 3^{n-1} J$

b) Établir que : $$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\, 3^{n-k-1}\, m^k = \frac{(m+3)^n - m^n}{3}$$

c) Pour n élément de $\mathbf{N}^*$, exprimer M_m^n en fonction de J, A et I.

II. 1° *a*) Soit $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3), f = af_0 + b\,g + c\,id, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\}$.

Montrer que la composée de deux éléments de E est un élément de E.

En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, f_m^n \in E$. ($f_m^n$ désigne la composée de n applications égales à f_m)

b) Démontrer que s'il existe un réel λ et un vecteur $\vec{x}$ tels que $f_m(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}$ alors, $\lambda = m + 3$ ou $\vec{x}$ appartient au noyau de f_0

2° *a*) Soit $\vec{x} \in B$. Déterminer $f_m(\vec{x})$ et $g(\vec{x})$. En déduire les matrices de f_m et de g dans B.

b) Retrouver le résultat du I 2° c).

PROBLÈME (*sur 13 points*)

I. On considère la fonction numérique f :

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$$

On appelle ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 3 cm sur $(O ; \vec{i})$; 10 cm sur $(O ; \vec{j})$).

1° *a*. Étudier les variations de f et préciser la nature des branches infinies de ($\mathcal{C}$).

b. Démontrer que ($\mathcal{C}$) possède un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées. Écrire une équation de la tangente à ($\mathcal{C}$) en I.

c. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions (on notera α la plus grande).

Déterminer l'entier n_0 tel que : $$\frac{n_0}{100} < \alpha < \frac{n_0 + 1}{100}$$

Tournez la page S.V.P.

d. Démontrer que, pour x élément de $]-1, +\infty[$ $\quad f(x) \leqslant x$.

e. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) ainsi que la droite d'équation $y = x$.

2° *a.* Montrer que si $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

b. On considère alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Donner sa limite en justifiant la réponse.

3° Soit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général : $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)$.

a. Montrer que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$.

b. En déduire que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, 2\ln(k+2) - 3\ln(k+1) + \ln k < f\left(\frac{1}{k}\right)$

c. Déduire de *b* que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln \frac{(n+2)^2}{4(n+1)} < S_n$. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

II. Dans cette partie, on suppose que $x \in]-1, 1[$.

1° Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$.

2° Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$

3° En déduire que : $\quad f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{2k-1}{k} x^k + \frac{2(-1)^{n+1} x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$

4° *a.* Démontrer que, si t est compris entre 0 et x, alors : $\quad \left| \frac{t^{n+1}}{1+t} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$

b. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt = 0$

c. Démontrer que : $\quad \forall x \in]-1, 1[, \ f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k-1}{k} x^k$.

III. Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\quad \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall t \neq 0, \varphi(t) = \frac{1}{t} \ln(1+t^2) \end{cases}$

1° *a.* Étudier la continuité et la dérivabilité de φ sur $\mathbf{R}$. Montrer que : $\forall t \neq 0, \ \varphi'(t) = \frac{1}{t} f(t^2)$

b. Pour tout réel x, justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^x \varphi(t)\,dt$.

2° Soit $\Phi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $\quad x \longmapsto \int_0^x \varphi(t)\,dt$.

a. Montrer que Φ est paire.

b. Démontrer que Φ est dérivable sur $\mathbf{R}$. Étudier le sens de variation et la concavité de Φ.

3° *a.* Pour tout x réel supérieur ou égal à 1, calculer $\int_1^x \frac{2}{t} \ln t\,dt$. En déduire que : $\forall x \geqslant 1, \Phi(x) - \Phi(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.

b. Montrer que : $\forall x \geqslant 0, \quad \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire que : $\forall x \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \int_1^x \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \leqslant \frac{1}{2}$

4° Soit Γ la courbe représentative de Φ dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 4 cm.

a. Étudier les branches infinies de Γ.

b. Donner l'allure de Γ (on donne $\Phi(\sqrt{\alpha}) \simeq 1{,}17$).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail